Донецкий Национальный Технический Университет

Лабораторная работа № 4

**«**Задача о назначениях (о выборе)**»**

Выполнил:

Лысенко А. С.

Проверила:

Скрипник Т.В.

Покровск 2016

Метод потенциалов

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10 | 8 | 8 | 11 | 1 |
| 2 | 19 | 18 | 20 | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30 | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20 | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 1 + 1 + 1 + 1 = 4  
∑b = 1 + 1 + 1 + 1 = 4  
Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.  
Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10 | 8 | 8 | 11 | 1 |
| 2 | 19 | 18 | 20 | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30 | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20 | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.  
1. Используя *метод наибольшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наибольшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наибольшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 4, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является вырожденным.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 11\*1 + 19\*1 + 30\*1 + 20\*1 = 80  
Для получения невырожденного плана принудительно добавляем нуль [0] в клетку (1;1); (1;2); (1;3);

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 10[0] | 8[0] | 8[0] | 11[1] |
| 2 | 19[1] | 18 | 20 | 10 |
| 3 | 15 | 30[1] | 25 | 16 |
| 4 | 8 | 9 | 20[1] | 15 |

**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 10; 0 + v1 = 10; v1 = 10  
u2 + v1 = 19; 10 + u2 = 19; u2 = 9  
u1 + v2 = 8; 0 + v2 = 8; v2 = 8  
u3 + v2 = 30; 8 + u3 = 30; u3 = 22  
u1 + v3 = 8; 0 + v3 = 8; v3 = 8  
u4 + v3 = 20; 8 + u4 = 20; u4 = 12  
u1 + v4 = 11; 0 + v4 = 11; v4 = 11

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=10 | v2=8 | v3=8 | v4=11 |
| u1=0 | 10[0] | 8[0] | 8[0] | 11[1] |
| u2=9 | 19[1] | 18 | 20 | 10 |
| u3=22 | 15 | 30[1] | 25 | 16 |
| u4=12 | 8 | 9 | 20[1] | 15 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;2): 9 + 8 < 18; ∆22 = 9 + 8 - 18 = -1  
(2;3): 9 + 8 < 20; ∆23 = 9 + 8 - 20 = -3  
max(1,3) = -3  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;3): 20  
Для этого в перспективную клетку (2;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10[0][+] | 8[0] | 8[0][-] | 11[1] | 1 |
| 2 | 19[1][-] | 18 | 20[+] | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30[1] | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20[1] | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

Цикл приведен в таблице (2,3 → 2,1 → 1,1 → 1,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10[0] | 8[0] | 8 | 11[1] | 1 |
| 2 | 19[1] | 18 | 20[0] | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30[1] | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20[1] | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 10; 0 + v1 = 10; v1 = 10  
u2 + v1 = 19; 10 + u2 = 19; u2 = 9  
u2 + v3 = 20; 9 + v3 = 20; v3 = 11  
u4 + v3 = 20; 11 + u4 = 20; u4 = 9  
u1 + v2 = 8; 0 + v2 = 8; v2 = 8  
u3 + v2 = 30; 8 + u3 = 30; u3 = 22  
u1 + v4 = 11; 0 + v4 = 11; v4 = 11

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=10 | v2=8 | v3=11 | v4=11 |
| u1=0 | 10[0] | 8[0] | 8 | 11[1] |
| u2=9 | 19[1] | 18 | 20[0] | 10 |
| u3=22 | 15 | 30[1] | 25 | 16 |
| u4=9 | 8 | 9 | 20[1] | 15 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;2): 9 + 8 < 18; ∆22 = 9 + 8 - 18 = -1  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;2): 18  
Для этого в перспективную клетку (2;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10[0][+] | 8[0][-] | 8 | 11[1] | 1 |
| 2 | 19[1][-] | 18[+] | 20[0] | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30[1] | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20[1] | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

Цикл приведен в таблице (2,2 → 2,1 → 1,1 → 1,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 2) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10[0] | 8 | 8 | 11[1] | 1 |
| 2 | 19[1] | 18[0] | 20[0] | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30[1] | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20[1] | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 10; 0 + v1 = 10; v1 = 10  
u2 + v1 = 19; 10 + u2 = 19; u2 = 9  
u2 + v2 = 18; 9 + v2 = 18; v2 = 9  
u3 + v2 = 30; 9 + u3 = 30; u3 = 21  
u2 + v3 = 20; 9 + v3 = 20; v3 = 11  
u4 + v3 = 20; 11 + u4 = 20; u4 = 9  
u1 + v4 = 11; 0 + v4 = 11; v4 = 11

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=10 | v2=9 | v3=11 | v4=11 |
| u1=0 | 10[0] | 8 | 8 | 11[1] |
| u2=9 | 19[1] | 18[0] | 20[0] | 10 |
| u3=21 | 15 | 30[1] | 25 | 16 |
| u4=9 | 8 | 9 | 20[1] | 15 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Максимальная прибыль составит: F(x) = 11\*1 + 19\*1 + 30\*1 + 20\*1 = 80  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо весь груз направить в 4-й магазин.  
Из 2-го склада необходимо весь груз направить в 1-й магазин.  
Из 3-го склада необходимо весь груз направить в 2-й магазин.  
Из 4-го склада необходимо весь груз направить в 3-й магазин.  
Задача имеет множество оптимальных планов, поскольку оценка для (1;1),(2;2),(2;3) равна 0.

Венгерский метод

Исходная матрица имеет вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 10 | 8 | 8 | 11 |
| 19 | 18 | 20 | 10 |
| 15 | 30 | 25 | 16 |
| 8 | 9 | 20 | 15 |

Модифицируем матрицу умножением всех элементов на (-1) и затем сложением их с максимальным элементом матрицы (30) так, чтобы матрица не содержала бы отрицательных элементов:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 20 | 22 | 22 | 19 |
| 11 | 12 | 10 | 20 |
| 15 | 0 | 5 | 14 |
| 22 | 21 | 10 | 15 |

**Шаг №1**.  
**1. Проводим редукцию матрицы по строкам**. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 3 | 0 | **19** |
| 1 | 2 | 0 | 10 | **10** |
| 15 | 0 | 5 | 14 | **0** |
| 12 | 11 | 0 | 5 | **10** |

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 3 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 10 |
| 14 | 0 | 5 | 14 |
| 11 | 11 | 0 | 5 |
| **1** | **0** | **0** | **0** |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.  
**2. Методом проб и ошибок** проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.  
Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 4). Другие нули в строке 1 и столбце 4 вычеркиваем.   
Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 1). Другие нули в строке 2 и столбце 1 вычеркиваем.   
Фиксируем нулевое значение в клетке (3, 2). Другие нули в строке 3 и столбце 2 вычеркиваем.   
Фиксируем нулевое значение в клетке (4, 3). Другие нули в строке 4 и столбце 3 вычеркиваем.   
В итоге получаем следующую матрицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [-0-] | 3 | 3 | **[0]** |
| **[0]** | 2 | [-0-] | 10 |
| 14 | **[0]** | 5 | 14 |
| 11 | 11 | **[0]** | 5 |

Количество найденных нулей равно k = 4. В результате получаем эквивалентную матрицу Сэ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 3 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 10 |
| 14 | 0 | 5 | 14 |
| 11 | 11 | 0 | 5 |

**4. Методом проб и ошибок определяем матрицу назначения Х**, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить максимальное значение прибыли.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 10 | 8 | 8 | 11 | 1 |
| 2 | 19 | 18 | 20 | 10 | 1 |
| 3 | 15 | 30 | 25 | 16 | 1 |
| 4 | 8 | 9 | 20 | 15 | 1 |
| Потребности | 1 | 1 | 1 | 1 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [-0-] | 3 | 3 | **[0]** |
| **[0]** | 2 | [-0-] | 10 |
| 14 | **[0]** | 5 | 14 |
| 11 | 11 | **[0]** | 5 |

Cmax = 11 + 19 + 30 + 20 = 80

Вывод: решения найденные 2-мя разными методами совпадают, т.к. в моем случае решения совпали, считаю, что решения должны обязательно совпадать.